FUNCIONES EN EL CONTEXTO: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

Edison De Faria Campos
Universidad de Costa Rica
edefaria@cariari.ucr.ac.cr

Resumen

Esta es una propuesta didáctica que consta de una serie de actividades que procuran relacionar las funciones matemáticas con situaciones de la vida cotidiana, interpretar hechos y fenómenos cotidianos mediante relaciones que corresponden a funciones y utilizar recursos tecnológicos para construir modelos matemáticos con datos de la realidad nacional costarricense. Además se proponen actividades relacionadas con la representación gráfica de ciertas funciones y su vinculación con una representación en un contexto físico o icónico (dibujo de un recipiente) (Janvier, 1987, Duval, 1992, 1999, Hitt, 1992, De Faria, 2004).

Palabras clave: Funciones, aprendizaje significativo, competencias tecnológicas, registros de representaciones semióticas.

Introducción

En 1985 el Shell Centre for Mathematical Education (1990) publicó el módulo “El lenguaje de las funciones y gráficas” con un gran número de actividades para realizar en el aula. Estas actividades, ideadas principalmente por Claude Janvier, proponen el desarrollo de la capacidad de interpretar y usar la información proporcionada por las representaciones gráficas, pues según Janvier, muchos estudiantes están familiarizados con dichas representaciones, pero son incapaces de extraer la información global que contienen. Es así que Janvier (1987) justifica la importancia en las posibles “traducciones” entre cuatro modos de representación de la función de acuerdo al cuadro abajo:

Representación	Gráfica	Tabular	Analítica	Verbal
Gráfica	Reelaboración de la gráfica	Estimación de valores de las variables	Elección de una familia verosímil	Interpretación de la gráfica
Tabular	Representación cartesiana de puntos	Reelaboración de la tabla	Realización de un ajuste	Interpretación y análisis de datos
Analítica	Representación gráfica	Cálculo de valores particulares de la fórmula	Manipulación algebraica o analítica de la fórmula	Identificación y análisis de la fórmula
Verbal	Construcción de un esbozo	Comparación de valores de las variables	Elaboración de un modelo funcional	Discusión y reflexión

Investigaciones realizadas por Duval (1992) reportan que en estudios en donde se presente un enunciado en el cual están en juego varios sistemas de representación, es importante analizar las articulaciones que hay de un sistema a otro.

Para Duval, un aprendizaje significativo se logra cuando se articulan diferentes representaciones de los objetos matemáticos y de las acciones realizadas sobre los objetos, lo que lleva a la construcción de esquemas de acción y de estructuras cognoscitivas. La habilidad para cambiar el registro de cualquier representación semiótica ocupa un lugar central en el aprendizaje de las matemáticas.

Otro aspecto importante se relaciona con la contextualización del contenido matemático construido en el aula. En el caso de las funciones, esta contextualización debería de ser muy natural pues ellas son utilizadas principalmente para modelar fenómenos físicos, químicos, biológicos y sociales. En este sentido considero que los Informes del Estado de la Nación son muy pertinentes como fuente de datos.

El Programa Estado de la Nación, creado por el CONARE, prepara anualmente un Informe Estado de la Nación, resultante de investigaciones y consulta a representantes de diversos sectores sociales. Están involucradas las cuatro universidades públicas y la Defensoría de los Habitantes. Estos informes nos invitan a mirar las matemáticas relacionadas con el contexto, con situaciones de nuestra realidad nacional.

Otro documento útil es la “Propuesta didáctica para el abordaje de la matemática aplicada a la realidad nacional” conocida como “Un reflejo de mi país”, publicada por el Estado de la Nación (2007).

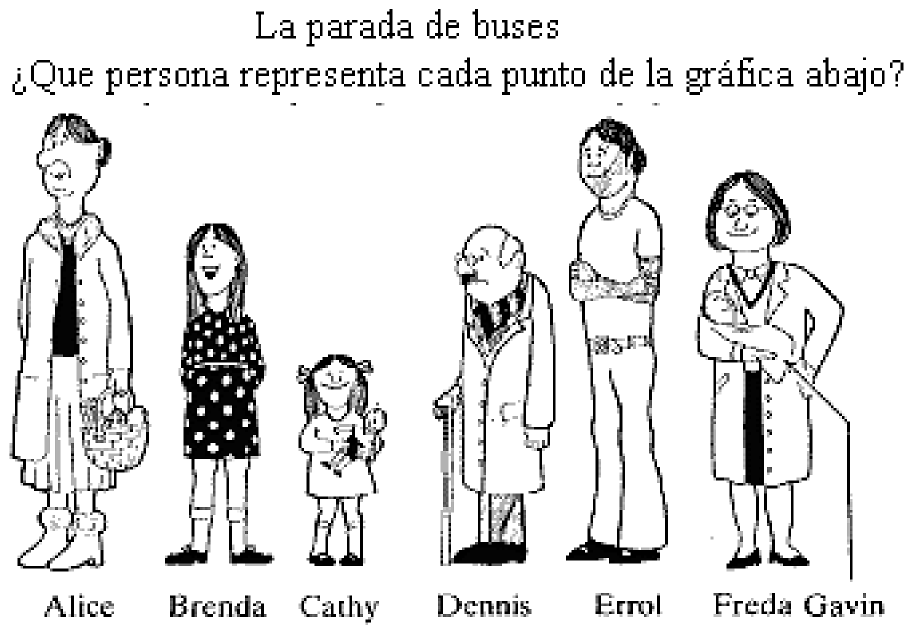
En esta propuesta utilizaré las ideas planteadas por Janvier, Duvall, y documentos publicados por el Programa Estado de la Nación, para aportar algunas estrategias metodológicas para el tema de funciones.

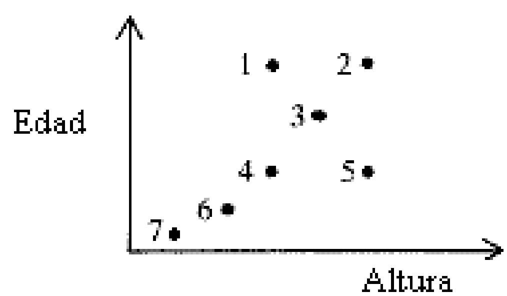
Actividad 1: Identificando personas con puntos en el plano.

Objetivo: Relacionar personas (en un dibujo) con puntos en el plano cartesiano.

Considere el dibujo abajo que representa a un grupo de personas que se encuentran en fila en una parada de bus (Swan, 1985). La tarea consiste en relacionar cada punto (par ordenado) del plano cartesiano con una persona, considerando que en el eje horizontal está representada la altura y en el vertical la edad de la persona. Son 7 personas, incluyendo el bebé Gavin que se encuentra en los brazos de la enfermera Freda y 7 puntos en el plano cartesiano.

¿La relación dada corresponde a una función? Explique. Si pasamos la edad para el eje horizontal y la altura para el eje vertical ¿la relación correspondería a una función? ¿Qué sucedería si Brenda tuviera una gemela idéntica junta a ella en la fila del bus? ¿Cómo sería la representación de ambas en el plano cartesiano?





Actividad 2: Identificando gráfica con puntos deporte.

Objetivo: Relacionar una gráfica con un deporte que la genera.

Para la siguiente actividad (Swan, 1985) se proporciona una representación gráfica que corresponde a la práctica de algún deporte. En el eje horizontal corresponde al tiempo mientras que el vertical corresponde a la rapidez. La idea consiste en determinar que tipo de deporte, entre una lista dada, produce la gráfica dada. La solución puede no ser única, y los estudiantes podrían sugerir otros tipos de actividades deportivas.

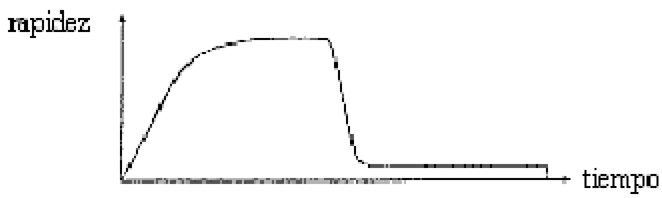
¿La relación entre la gráfica dada y los posibles deportes representados por ella corresponde a una función?

Sugiera otras gráficas que puedan ser relacionadas con la lista de deportes dada.

Piense en el problema inverso: dado un tipo de deporte, ¿qué gráficas se relacionan con él?

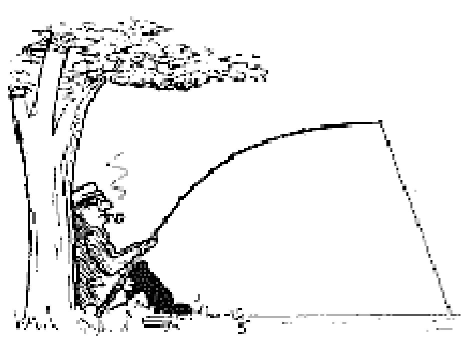
¿Cuál es el deporte?

¿Qué deporte produce una gráfica como la siguiente?



Escoja entre los siguientes deportes de la lista abajo y explique cómo se ajusta a la gráfica dada.

Escriba las razones para rechazar otras alternativas de la lista dada.



Pesca
Carrera de 100 metros
Buceo
Futbol
Golf
Lanzamiento de javalina
Carrera de autos
Canopy
Ciclismo
Natación
Tenis

Actividad 3: Llenando recipientes

Objetivo: Pasar de la representación física a la representación gráfica y recíprocamente.

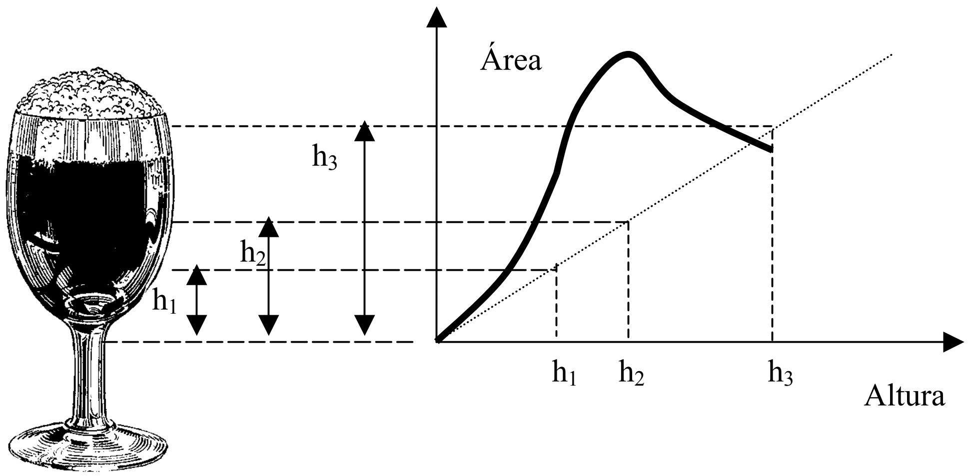
Las posibilidades de traducciones entre los distintos sistemas de representaciones llevaron a Janvier a idear varias actividades en las que se prima la utilización de distintos modos de representación de la función y el paso de un modo de representación a otro. Una de las actividades se denominó curvas de llenado y consistía en solicitar a los estudiantes que hicieran un esbozo de una curva que expresara como varía con el tiempo, la altura del líquido contenido en cada una de las botellas, cuando las mismas son llenadas a caudal constante.

El problema inverso también es importante, es decir, dibujar un posible recipiente que corresponda a una gráfica dada tiempo-altura, y fue investigado por Hitt (1992) en México. Aquí propongo algunas actividades relacionadas con curvas de llenado y el problema inverso, que pueden ser aplicadas tanto a estudiantes de la educación secundaria como a estudiantes universitarios en un primer curso de cálculo. Estas actividades corresponden a conversiones entre diferentes registros de representaciones, Duval (1992,1999), Janvier (1987).

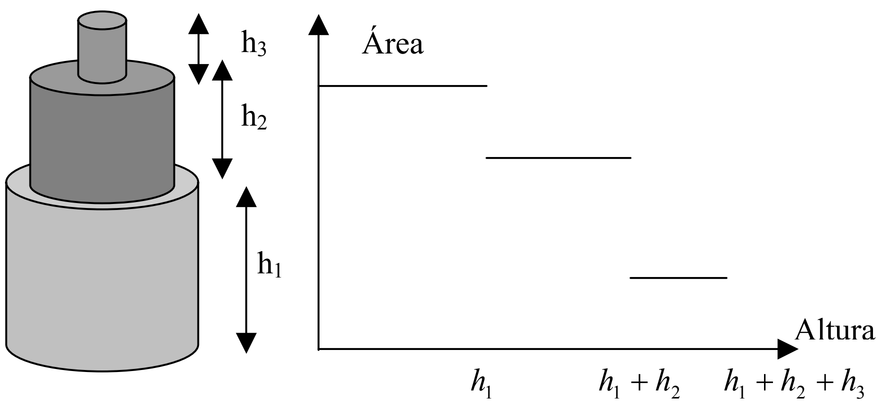
Considero que este tipo de actividad presenta una ventaja adicional: permite visualizar el comportamiento global de la gráfica de una función dado su modelo físico o icónico, o bien el modelo del recipiente, dado la representación gráfica de elementos del mismo. Ambos comportamientos, local y global, permiten que tengamos una mayor comprensión del objeto estudiado: las funciones.

El recipiente abajo (una copa) se encuentra inicialmente vacío, sobre una superficie horizontal plana. Empezamos a llenarlo despacio (sin inclinarlo) de tal forma que la superficie del líquido siempre se encuentre en equilibrio y coincida con la sección transversal del recipiente. Queremos bosquejar una posible gráfica que corresponda al llenado de la copa, si la variable independiente es la altura del líquido y la dependiente es el área de la superficie del líquido (sección transversal).

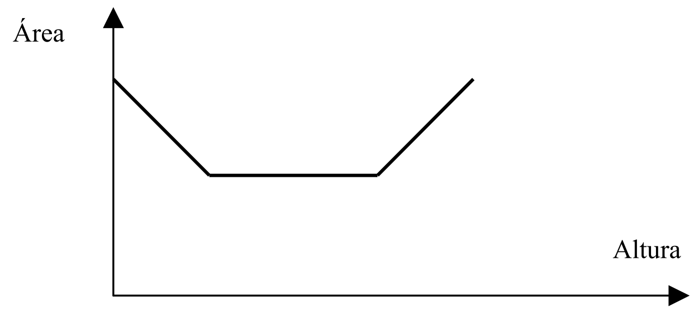
En este caso, el área inicial es igual a cero (recipiente vacío). Cuando introducimos el líquido, el área de la superficie – con forma aproximadamente circular – aumenta con la altura, inicialmente de manera muy pronunciada, posteriormente más despacio, hasta llegar a un valor máximo. A partir de la altura correspondiente al área máxima, el área empieza a disminuirse lentamente hasta alcanzar un valor límite, correspondiente a la copa llena de líquido. Por lo tanto una posible representación gráfica que corresponde a la figura dada es la siguiente:



En este ejemplo se supone que la forma de la copa es “suave” en el sentido de que las curvas resultantes son continuas, pero podemos diseñar recipientes cuyas gráficas corresponden a funciones discontinuas, como la siguiente botella:



Ahora considere el problema inverso. Dibuje un posible recipiente que corresponda a la gráfica abajo (la forma del recipiente no es única):

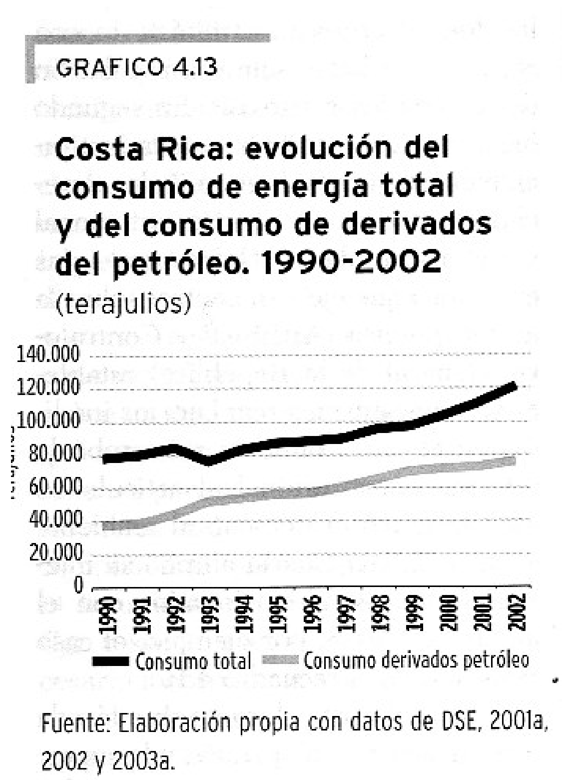


Actividad 4: Consumo total de energía en Costa Rica.

Objetivo: Obtener una recta de mejor ajuste para el consumo total de energía en Costa Rica.

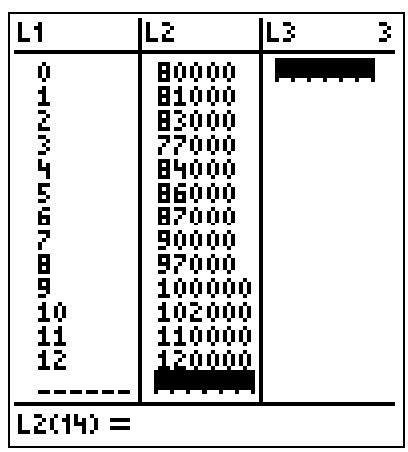
En el Informe Estado de la Nación número 10, en la página 278 encontramos la siguiente gráfica que describe la evolución del consumo de energía total y del consumo de derivados de petróleo durante los años 1990 a 2002.

En el eje horizontal la variable es año mientras que en el vertical la variable es unidad de energía (en Terajulios). Observamos que la curva que mide la tendencia o comportamiento del consumo (en ambos casos) se parece a una recta. Por lo tanto podemos aproximar o ajustar los datos de la figura mediante una recta. Para ello podemos utilizar dos puntos (datos) para cada recta o bien utilizar varios puntos y sacar un promedio de las pendientes e intercepto-y. En cualquier caso tendremos que hacer aproximaciones pues no tenemos una tabla con los datos y las líneas de las curvas son muy gruesas. Utilizaremos un recurso didáctico que, la calculadora (TI-83 o TI-84), para hacer una regresión lineal.

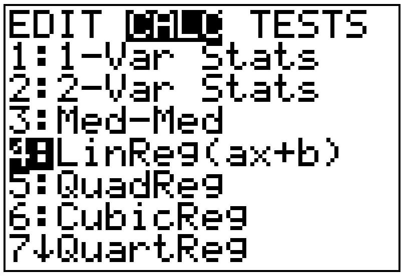


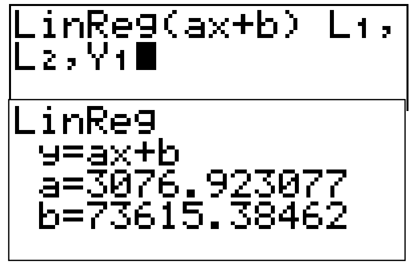
Informe número 10, página 278

Para digitar los datos en una tabla presionamos la tecla S seleccionamos EDIT opción 1: Edit. Los datos aproximados sacados de la figura son (asociamos el número 0 al año 1990):

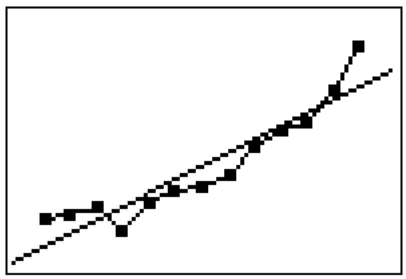


Seleccionamos å presionando `!, activamos Pot1, type: segunda opción, XList: L_1, YList: L_2. Para determinar la recta de mejor ajuste a los datos de la tabla presionamos S, seleccionamos CALC opción 4:LinReg(ax+b), presionamos ENTER y completamos la información: L_1, L_2, Y_1 (para obtener Y_1 presionamos la tecla VARS, opción Y-VARS, 1:Function, ENTER y finalmente seleccionamos Y_1). Aparecerá la ecuación de la recta de mejor ajuste para los datos introducidos.

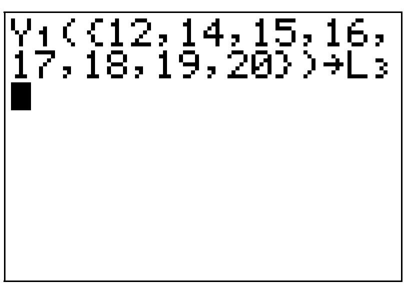


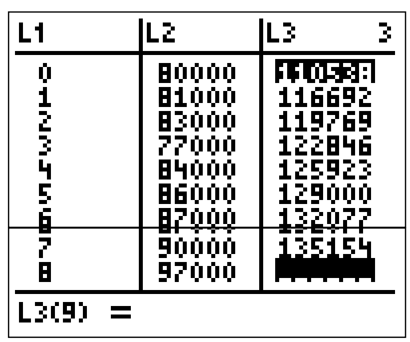


Finalmente podemos graficar los datos y la curva de mejor ajuste presionando # 9:ZoomStat.



Con la ecuación de la recta almacenada en la función Y_1 podemos estimar el consumo total de energía en años futuros (que no están en la tabla). Por ejemplo, para los años 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009 y 2010.





Así, la estimación del consumo total de energía para el 2003 es de 110.538 Terajulios mientras que para el 2010 es de 135.154 Terajulios.

Actividad 5: Promedio en matemática en el tercer ciclo.

Objetivo: Buscar un patrón para el porcentaje de estudiantes de tercer ciclo con nota de examen menor o igual que 65 en matemática.

En el informe 11 página 88 encontramos la tabla abajo. Intentaremos buscar una tendencia para los datos de la tabla, correspondientes a matemáticas, utilizando la misma estrategia de la actividad anterior, es decir, buscando una curva de mejor ajuste para los datos.

CUADRO 2.3

Porcentaje de estudiantes de tercer ciclo con nota de examen igual o mayor que 65, por año según materia

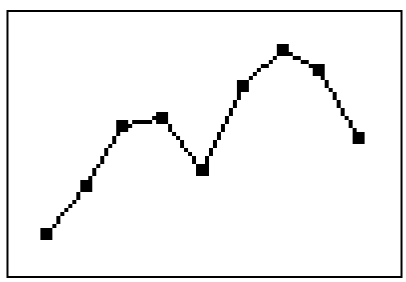
Materia	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Español	93,5	68,5	81,7	84,1	79,5	67,5	77,9	73,9	65,9
Estudios Sociales	37,7	23,5	38,1	44,0	63,2	72,5	75,6	77,9	71,0
Matemática	9,2	14,9	22,1	23,0	17,0	26,9	31,3	28,9	20,5
Ciencias	54,3	42,3	33,2	37,7	58,6	47,1	63,8	66,8	72,8
Educación Cívica							64,6	66,3	55,3
Francés	87,6	60,9	88,7	69,0	90,0	89,3	92,4	81,8	68,2
Inglés	74,7	80,4	68,7	62,6	75,7	64,1	62,0	58,6	74,3

Fuente: MEP, 2005g.

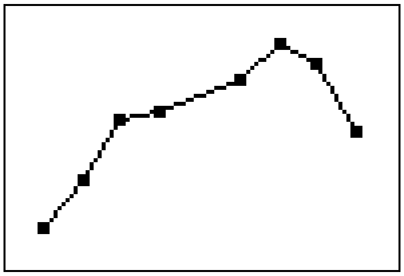
Informe número 11, página 88

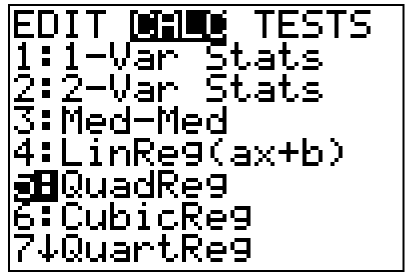
L1	L2	L3 1
0	9.2	------
1	14.9	
2	22.1	
3	23	
4	17	
5	26.9	
6	31.3	

L1(1) =0

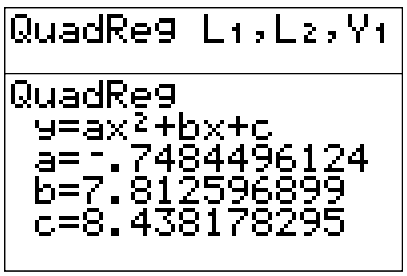


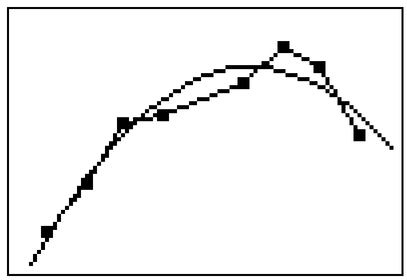
Pareciera que el quinto dato salió del patrón generado. Si lo eliminamos pareciera que la curva podría ajustarse mediante una parábola o por un polinomio de grado 4. Intentemos una regresión cuadrática y otra cuártica.

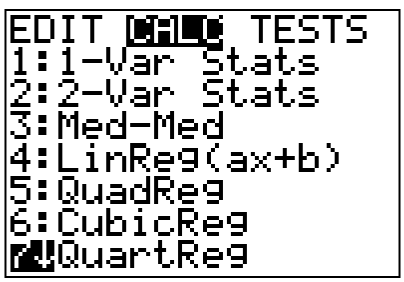


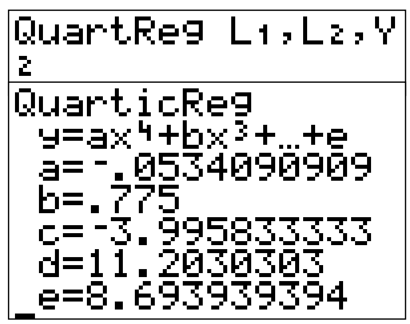


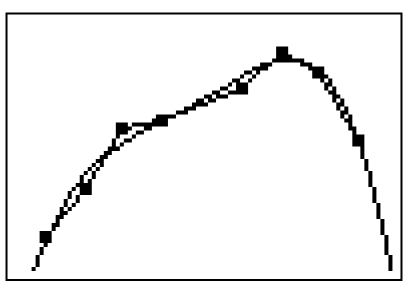
Es claro que el modelo matemático que construiremos puede no ajustarse a la realidad pues el nivel de dificultad de las pruebas puede cambiar. Además existen otros factores que no estamos tomando en consideración, como por ejemplo las decisiones de anular ciertas preguntas.











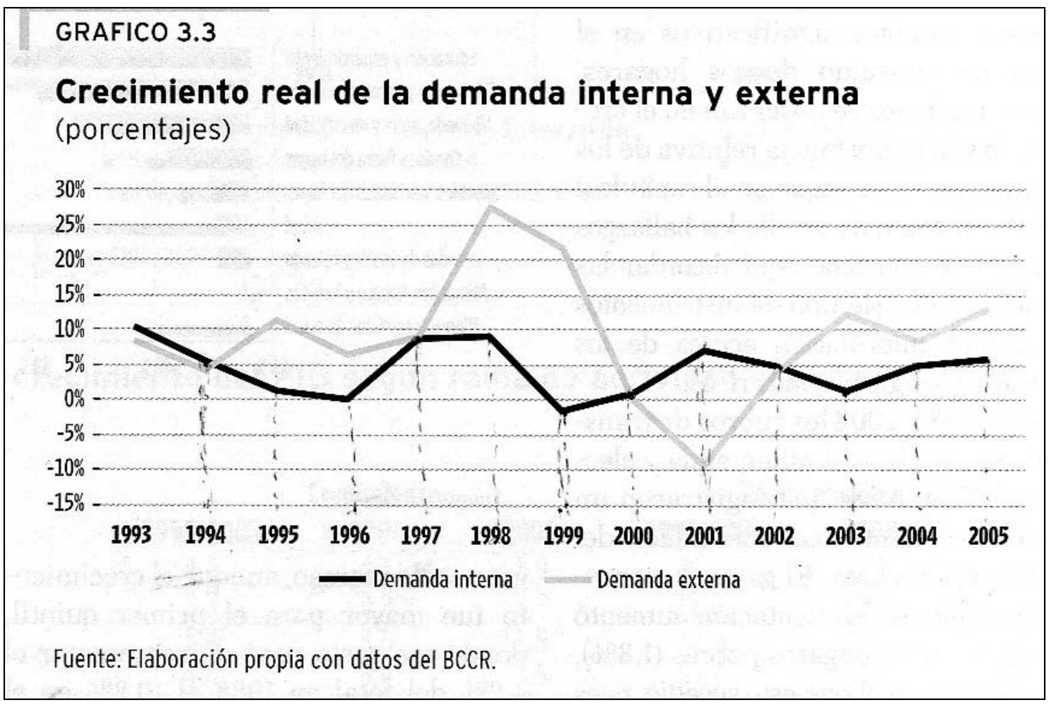
La curva de regresión de cuarto grado se ajusta mejor que la de segundo grado.

Actividad 6: Crecimiento de la demanda interna.

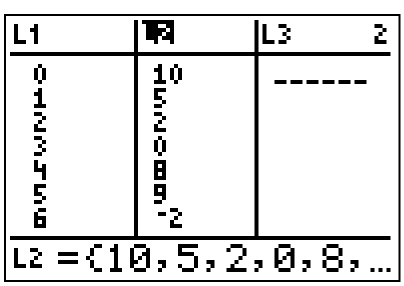
Objetivo: Buscar un patrón para el crecimiento de la demanda interna en Costa Rica de 1993 al 2004.

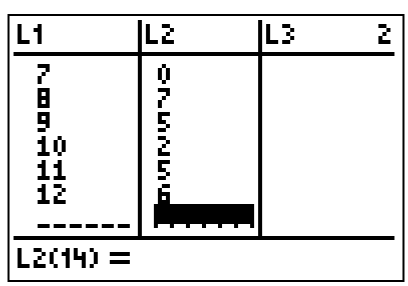
En el informe 12, página 143 encontramos la siguiente gráfica que representa los porcentajes de la demanda interna y la externa en Costa Rica durante los años 1993 a 2004.

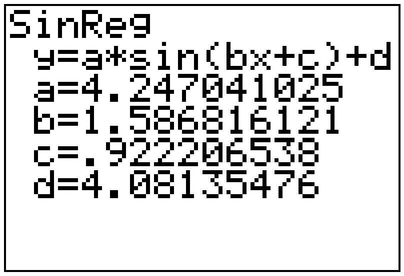
La gráfica de la demanda interna se parece tener un comportamiento cíclico y por lo tanto intentaremos ajustar los datos mediante una curva del tipo $y = a.\mathrm{sen}(b.x + c) + d$, es decir una SinReg (regresión seno). El año cero corresponderá a 1993.

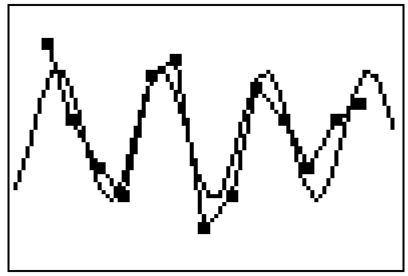


Informe 12, página 143









Vemos que se ajusta bien a los datos la regresión seleccionada.

Conclusiones

Estoy plenamente de acuerdo con la afirmación de Kaput (1992) de que los sistemas de representaciones son un aspecto central de la comprensión del sujeto acerca de los objetos matemáticos y sus relaciones y de las actividades matemáticas que éste ejecuta cuando realiza tareas que tienen que ver con esos objetos. Actividades como las propuestas aqui son significativas para los estudiantes por su conexión con situaciones de la vida real y permiten que el docente utilice materiales concretos (recipientes reales), datos relacionados con la realidad nacional y la cotidianidad, con el fin de que los estudiantes exterioricen las distintas representaciones mentales que poseen de un determinado concepto mediante diagramas, esbozos de curvas, frases y símbolos. Además, este tipo de actividad abre nuevas posibilidades para que el sujeto pueda tener una comprensión global de la gráfica de una función, y puede ser fuente de inspiración para que docentes y estudiantes puedan trabajar juntos en la construcción significativa del conocimiento matemático.

Referencias

De Faria, E. (2004). *Funciones embotelladas*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 17, Tomo II, páginas 584-589. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Duval, R. (1992) *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM Strasbourg.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía & Grupo de Educación Matemática. *Trad*. Myriam Vega Restrepo. Colombia.

Hitt, F. (1992). *Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. Evasión de representaciones analíticas*. Memorias del IV Simposio Internacional sobre investigación en Educación Matemática. CINVESTAV-IPN, Departamento de Matemática Educativa.

Janvier, C. (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1992). 'Technology and Mathematics Education' en D. A. Grouws (ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, N.Y.: Macmillan.

Swan, M. & Shell Centre Team. *The Language of Functions and Graphs* (The Red Box Materials). Publicado por Shell Centre & Joint Matriculation Board.